Endomorphismes semi-simples

[ROMBALDI, p 612]

ÉNONCÉ :

Théorème : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

- f est semi-simple.
- Son polynôme minimal π_f est produit de polynômes irréductibles unitaires distincts deux à deux.

DÉVELOPPEMENT :

LEMMES :

1. Soit $\pi_f(X) = \prod_{k=1}^r P_k^{m_k}$ la décomposition en facteurs irréductibles de $\mathbb{K}[X]$, F est un sous-espace f-stable. Notons, pour $k \in \{1, \dots, r\}$, $N_k = Ker(P_k^{m_k}(f))$ et $F_k = F \cap N_k$. Alors on a :
$$F = \bigoplus_{k=1}^{n} F_k$$
2. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Si π_f est irréductible, alors f est semi-simple.

Démonstration. 1. En vertu du lemme des noyaux, $E = \oplus_{k=1}^n N_k$ et en notant, pour $k \in \{1, \dots, n\}$, p_k la projection sur N_k parallèlement à $\oplus_{i \neq k} N_i$, qui est un polynôme en f et F étant f-stable, on a $p_k(F) \subset F$. Or, $p_k(F) \subset Im(P_k) = N_k$, donc $p_k(F) \subset F \cap N_k = F_k$. Comme $\sum_{k=1}^r p_k = Id_E$, on en déduit que :
$$F = \sum_{k=1}^{r} p_k(F) \subset \bigoplus_{k=1}^{r} F_k$$
d'où l'égalité.

2. Soit F un sous-espace f-stable distinct de E. Soit $x_1 \notin F$ et soit $E_1 = \mathbb{K}[f](x_1)$ qui est un sous-espace f-stable. Soit π_{f,x_1} le polynôme minimal de $f_{|E_1}$. Alors on a $\pi_{f,x_1} \mid \pi_f$ et donc $\pi_{f,x_1} \mid \pi_f$ par irréductibilité.

Voyons que $E_1 \cap F = \emptyset$. Supposons qu'il existe $y \in E_1 \cap F$, $y \neq 0$. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $y = P(f)(x_1)$. Comme π_{f,x_1} est irréductible et que π_{f,x_1} ne divise pas P, π_{f,x_1} et P sont premiers entre eux. Il vient, par l'identité de BEZOUT :
$$\exists\, U, V \in \mathbb{K}[X], \quad U\pi_{f,x_1} + VP = 1$$
et donc $x_1 = U(f)(y) \in F$ car F est f-stable, ce qui est absurde.
Ainsi, E_1 et F sont en somme directe. Si $E = E_1 \oplus F$, alors c'est terminé. Sinon, on prend arbitrairement un $x_2 \in E \setminus (E_1 \oplus F)$ et on réitère le raisonnement précédent. Comme E est de dimension finie, on obtient en un nombre fini d'itérations $\oplus_{i=1}^l E_i$, sous espace f-stable supplémentaire de F.

□

Démonstration. (théorème) :
Supposons que f soit semi-simple. Par l'absurde, supposons que l'un des $(m_k)_{1 \leq k \leq r}$ soit strictement supérieur à 1, disons m_i. On pose $F = KerP_i(f)$ qui est f stable. Par hypothèse, F admet un supplémentaire G f-stable. Soit Alors $M_i = \pi_f / P_i^2$. On a $P_iM_i(f)(G) \subset F$ puisque $P_i(f)(P_iM_i)(f)(G) = \pi_f(f)(G) = 0$ et $P_iM_i(f)(G) \subset G$ par

f-stabilité de G. Donc $P_i M_i(f)(G) \subset F \cap G = \{0\}$.
Mais comme $P_i M_i(f)(F) \subset P_i(f)(F) = \{0\}$, on a que $P_i M_i$ annule f_i et $\deg(P_i M_i) < \deg(P_i^2 M_i) = \deg(\pi_f)$, ce qui est absurde. Ainsi, π_f est sans facteur carré.

Réciproquement, supposons que π_f soit sans facteur carré. Soit F un sous-espace vectoriel f-stable. On a : $F = \bigoplus_{k=1}^r F \cap N_k = \bigoplus_{k=1}^r F_k$ où $N_k = Ker P_k(f)$.
Fixons $k \in \{1, \dots, r\}$. Comme N_k est f-stable, on regarde $f_{|N_k}$, qui admet pour polynôme minimal P_k qui est irréductible, donc par ce qui précède, il existe G_k supplémentaire f-stable de F_k dans N_k. Alors :

$$E = \bigoplus_{k=1}^{r} (F_k \oplus G_k) = \left(\bigoplus_{k=1}^{r} F_k \right) \bigoplus \left(\bigoplus_{k=1}^{r} G_k \right) = F \oplus G$$

où G est f-stable puisque chaque $(G_k)_{1 \leq k \leq r}$ l'est. Donc f est semi-simple. □

Remarques :

- La démonstration est assez technique et nécessite d'être à l'aise avec les polynômes minimaux ainsi que ceux des restrictions à des sous-espaces stables.
- On pourra survoler le premier lemme (qu'il faut être en mesure de remontrer rapidement) afin de ne pas être pressé de finir et omettre d'expliquer les points techniques.
- Sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, endomorphismes semi-simple et diagonalisable coïncident. Ce n'est plus le cas dans le cadre réel.
- Une application de ce théorème est la décomposition de DUNFORD généralisé à n'importe quel endomorphisme de notre espace vectoriel, où cette fois-ci $f = s + n$ où n est nilpotent et s semi-simple.